Γραμμική Άλγεβρα Ι, Ιανουάριος 2023, Τμήμα Λ-Ω

Θέμα 1 (10 Μόρια)
Για τυχαία $x, y \in \mathbb{R}$ να βρεθεί την ορίζουσα του $n \times n$ πίνακα

$$A_n = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

Θέμα 2 (25 Μόρια) Έστω $n > 2$ και $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια γραμμική απεικόνιση για την οποία ισχύει ότι $f^n = \vec{0}$ και ότι υπάρχει διάνυσμα $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $f^{n-1}(\vec{x}) \neq \vec{0}$ (όπου $f^n := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n-\text{φορές}}$).

(i) Να δειχθεί ότι το σύνολο $C = \{\vec{x}, f(\vec{x}), f^2(\vec{x}), \dots, f^{n-1}(\vec{x})\}$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Να βρεθεί ο πίνακας της f ως προς τη βάση C.

(iii) Αν $n = 2$, να δειχθεί ότι $\ker f = \operatorname{Im} f$.

Θέμα 3 (25 Μόρια)
Αν $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε το σύστημα εξισώσεων

$$(\Sigma) \begin{cases} (\lambda+1)x + y + z = \lambda^2 + 3\lambda \\ x + (\lambda+1)y + z = \lambda^3 + 3\lambda^2 \\ x + y + (\lambda+1)z = \lambda^4 + 3\lambda^3 \end{cases}$$

(i) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το (Σ) είναι σύστημα Cramer.

(ii) Αν $\lambda = 1$, να δειχθεί ότι ο πίνακας συντελεστών A του (Σ) είναι αντιστρέψιμος και να βρεθεί ο αντίστροφος του A με την εκτέλεση στοιχειωδών πράξεων στις γραμμές του.

(iii) Να βρεθεί η βαθμίδα του πίνακα A των συντελεστών του συστήματος (Σ).

(iv) Για τα $\lambda \in \mathbb{R}$ που το σύστημα (Σ) δεν είναι Cramer, να βρεθούν όλες οι λύσεις του συστήματος (Σ).

Θέμα 4 (25 Μόρια)
Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathcal{V}$ και $\mathcal{W}$ του $\mathbb{R}^4$, με

$$\mathcal{V} = \langle (1,2,3,4), (-2,1,-1,2), (3,1,1,2), \rangle \ \text{ και } \ \mathcal{W} = \langle (1,-1,-1,1), (1,-2,-2,1) \rangle.$$

(i) Να βρεθούν βάσεις για του υπόχωρους $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ και $\mathcal{V} + \mathcal{W}$. Ποιά η διάσταση του $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$;

(ii) Να βρεθεί υπόχωρος $\mathcal{Z}$ του $\mathbb{R}^4$ ώστε $\mathbb{R}^4 = \mathcal{Z} \oplus \mathcal{W}$.

(iii) Να κατασκευαστεί ισομορφισμός $f\colon \mathbb{R}_n[t] \longrightarrow \mathcal{V}$, για κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Να Να κατασκευαστεί ισομορφισμός $f\colon \mathbb{M}_n(R) \longrightarrow \mathcal{V} + \mathcal{W}$, για κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$.

Θέμα 4 (25 Μόρια)
Θεωρούμε τη γραμμική απεικόνιση $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, με

$$f(x,y,z,w) = (x - y + 3z - w, x + 2z - 2w, -y + z + w).$$

(i) Να βρεθεί ο πίνακας $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$ της f ως προς τις κανονικές βάσεις $\mathcal{B}$ και $\mathcal{C}$ των $\mathbb{R}^4$ και $\mathbb{R}^3$, αντίστοιχα.

(ii) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της f η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{B}'$ του $\mathbb{R}^4$.

(iii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\operatorname{Im} f$ της f η οποία και να επεκταθεί σε μία βάση $\mathcal{C}'$ του $\mathbb{R}^3$.

(iv) Να βρεθεί ο πίνακας B της f ως προς τις βάσεις $\mathcal{B}'$ και $\mathcal{C}'$ των δύο προηγουμένων ζητημάτων.

(v) (5 Μόρια) Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $Q \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ και $P \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ έτσι ώστε $B = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

- Διάρκεια Εξέτασης: **2** ώρες και **30** λεπτά.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ